Olympiadeklassen **9–10**

64. Mathematik-Olympiade
1. Runde (Schulrunde)
Aufgaben

Hinweise: 1. *Für die Olympiadeklassen 9 und 10 stehen in der ersten Runde insgesamt sechs Aufgaben zur Verfügung, aus denen die Verantwortlichen vor Ort eine geeignete Auswahl treffen können. Wenn die erste Runde als Hausaufgabenwettbewerb durchgeführt wird, kann die Wahl von vier der sechs Aufgaben auch den Teilnehmenden überlassen werden.*

2. *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

641011

a) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 5$.

b) Man bestimme die Anzahl der ganzzahligen Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Hinweis: Eine Lösung ist ein *geordnetes* Tripel (x, y, z), welches die jeweilige Gleichung erfüllt.

Hinweis: Die Gleichung $x^2 + y^2 + 4 \cdot z^2 = 4$ hat genau sechs ganzzahlige Lösungen, die alle (paarweise) verschieden sind: $(0, 0, 1)$, $(0, 0, -1)$, $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$.

641012

In einem gegebenen Kreis betrachten wir konvexe Vierecke. Die Ecken der Vierecke dürfen im Innern des Kreises liegen oder auf diesem Kreis.

Zeigen Sie, dass jedes solcher Vierecke mit größtem Flächeninhalt dann ein Quadrat ist.

Hinweis: In jedem konvexen Viereck sind alle Innenwinkel kleiner als 180°.

641013

Wir betrachten Figuren, die durch die Koordinaten einiger ihrer Punkte und die zur jeweiligen Figur gehörenden Verbindungsstrecken gegeben sind.

a) $A(2, 2)$, $E(14, 2)$, $B(23, 2)$, $F(23, 14)$, $C(23, 23)$, $G(11, 23)$, $D(2, 23)$ und $H(2, 11)$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$, $\overline{EF}$, $\overline{FG}$, $\overline{GH}$ und $\overline{HE}$.
Zeigen Sie, dass das Viereck $EFGH$ ein Quadrat ist und bestimmen Sie seine Seitenlänge.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

b) $A(1,2)$, $B(13,2)$, $C(25,2)$, $D(25,11)$ und $E(1,18)$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$, $\overline{EA}$, $\overline{BE}$ und $\overline{BD}$.
Zeigen Sie, dass die Strecke $\overline{BD}$ den Winkel $\sphericalangle EDC$ halbiert.

<u>641014</u>

Wir berechnen für jede positive ganze Zahl n die Zahl y anhand der Formel

$$y = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)}{4} .$$

a) Zeigen Sie, dass y für $n = 9$ und auch für $n = 2025$ jeweils das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

b) Zeigen Sie, dass y für jede positive ganze Zahl n das Produkt von zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ist.

<u>641015</u>

Ein Schaf und eine Ziege können eine Wiese gemeinsam in 50 Minuten abfressen.

Eine Ziege allein hätte 80 Minuten gebraucht, um die Wiese abzufressen.

Ermitteln Sie die Zeit, in der 5 Schafe und 2 Ziegen die Wiese abfressen können, wenn gilt: Alle Schafe fressen gleich schnell und alle Ziegen fressen auch gleich schnell. Die Fressgeschwindigkeit eines Tieres ändert sich nicht, wenn weitere Tiere anwesend sind.

<u>641016</u>

In der abgebildeten Figur ist jeder der neun eingezeichneten Kreise mit je einer der jeweils in den Teilaufgaben festgelegten Zahlen so zu beschriften, dass alle neun Zahlen verwendet werden und auf jedem der drei geradlinigen Abschnitte (auf denen sich jeweils vier Kreise befinden) die Summe s der vier Zahlen in jedem geradlinigen Abschnitt stets die gleiche ist.

a) Hier sollen die neun Zahlen 2021, 2022, 2023, …, 2029 eingetragen werden.
Geben Sie eine derartige Beschriftung und die mit dieser Beschriftung erreichte Abschnittssumme s an.
Überprüfen Sie außerdem, ob es derartige Beschriftungen mit den gegebenen Zahlen gibt, bei denen die Abschnittssumme s den Wert 8097 bzw. den Wert 8104 hat.

b) In dieser Teilaufgabe tragen wir die neun Zahlen 1, 2, 2^2, 2^3, …, 2^8 ein.
Wie viele Werte kann die gemeinsame Abschnittssumme s annehmen?